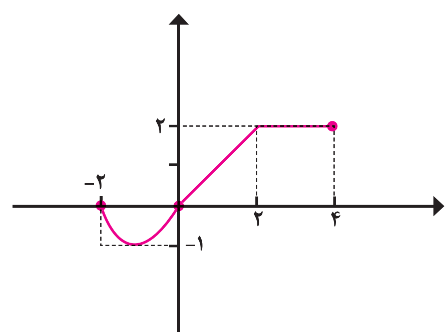
حسابان

۱. برد تابع $f(x)=\sin^6x+\cos^6x$ را به‌دست آورید.

۲. اگر نمودار تابع f به‌صورت زیر باشد، نمودار تابع $y=f(2x-2)$ را رسم کنید.



۳. اگر داشــته باشــیم: $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$، تابع fofof و دامنهٔ آن‌را پیدا کنید.

۴. تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}x^2+x & x\ge 0\\ x^2-x & x\le 0\end{cases}$ مفروض است. زوج یا فرد بودن این تابع را بررسی کنید.

۵. برد تابع $f(x)=\sqrt{x+10}-\sqrt{x+1}$ با دامنهٔ $[-1,6]$ شــامل چند عدد صحیح است؟

۶. اگر تابع $f(x)=(a+1)x^4+(a+2)x^3+(a+4)x^2+3x$ با دامنهٔ R وارون‌پذیر باشد، نمودار تابع وارون f نیم‌ساز ربع اول و سوم را در چند نقطه قطع می‌کند؟

جبر و احتمال

۱. مجموعه‌های A و B را به شکل گزاره‌نما بنویسید.

$$A=\{5,55,555,\dots\},\ B=\left\{\frac{1}{2},0,\frac{1}{8},0,\frac{1}{32},0,\dots\right\}$$

۲. تعداد زیرمجموعه‌های ســه عضوی یک مجموعه، بیشــتر از تعــداد زیرمجموعه‌هــای پنج عضوی آن اســت. این مجموعه حداکثر چند زیرمجموعهٔ سه عضوی دارد؟

۳. نمــودار رابطــهٔ $R=\left\{(x,y)\in R^2 \,\middle|\, x^2+y^2\ge 1, |x|<y\right\}$ را رسم کنید.

۴. رابطهٔ R روی مجموعهٔ $R-\{1\}$ به‌صورت $aRb \Leftrightarrow a+b-ab\le 1$ تعریف شده است. نشان دهید که R یک رابطهٔ هم‌ارزی است.

۵. یک رابطهٔ هم‌ارزی روی مجموعهٔ A={a,b,c,d,e,f} نوشته شده است. اگر این رابطه مجموعهٔ A را به سه دستهٔ هم‌ارزی افراز کرده باشد، حداقل و حداکثر تعداد عضوهای این رابطه را بنویسید.

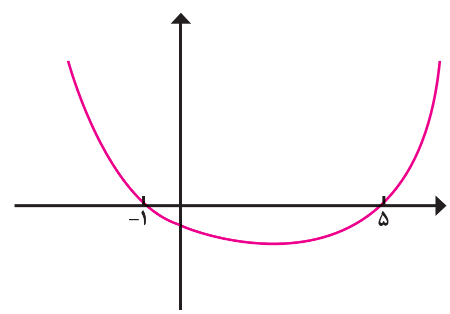
۶. به کمک جبر مجموعه‌ها ثابت کنید که: $A\cap(B\Delta C)=(A\cap B)\Delta(A\cap C)$.

ریاضی ۳

۱. نامعادلهٔ $x-۴-\frac{۱}{x^۲-۴x} > ۲x-۳-\frac{۱}{x^۲-۴x}$ را حل کنید.

۲. اگر $\cos(x+\frac{\pi}{۳})+\cos(x-\frac{\pi}{۳})=\frac{۲}{۳}$، مقدار $\cos ۲x$ را به‌دست آورید.

۳. دامنهٔ تابع $y=\sqrt{xf(x)}$ را پیدا کنید، در صورتی‌که نمودار تابع $y=f(x+۱)$ به‌صورت زیر باشد.

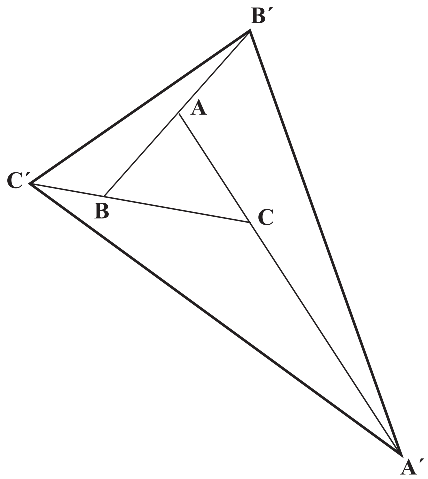


۴. اگر: $f(x)=\frac{x+۱}{x-۱}$ و $fog(x)=\frac{x^۲+۲}{x^۲+۱}$، مقدار $g(۱)$ را به‌دست آورید.

۵. اگر: $f(x)=\sqrt{۳-x}$ و $g(x)=\log_۲(x^۲+۲x)$، دامنهٔ تابع fog را به‌دست آورید.

هندسهٔ دهم

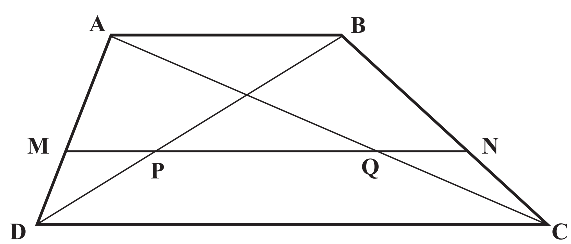
۱. در مثلث ABC، AB را به اندازهٔ خودش تا نقطهٔ B' $(AB'=AB)$، AC را به اندازهٔ دو برابر خودش تا نقطهٔ A' $(CA'=۲CA)$ و BC را به اندازهٔ نصف خودش تا نقطهٔ C' $(BC'=\frac{۱}{۲}BC)$ امتداد داده‌ایم. مساحت مثلث $A'B'C'$ چند برابر مساحت مثلث ABC است؟



۲. در مثلث ABC از نقطهٔ M روی BC دو خط موازی دو ضلع دیگر مثلث رسم می‌کنیم تا AC را در نقطهٔ D و AB را در E قطع کنند. ثابت کنید:

$$\frac{AE}{AB}+\frac{AD}{AC}=۱$$

۳. در ذوزنقهٔ ABCD داریم: MN||AB||CD. ثابت کنید: MP=QN.

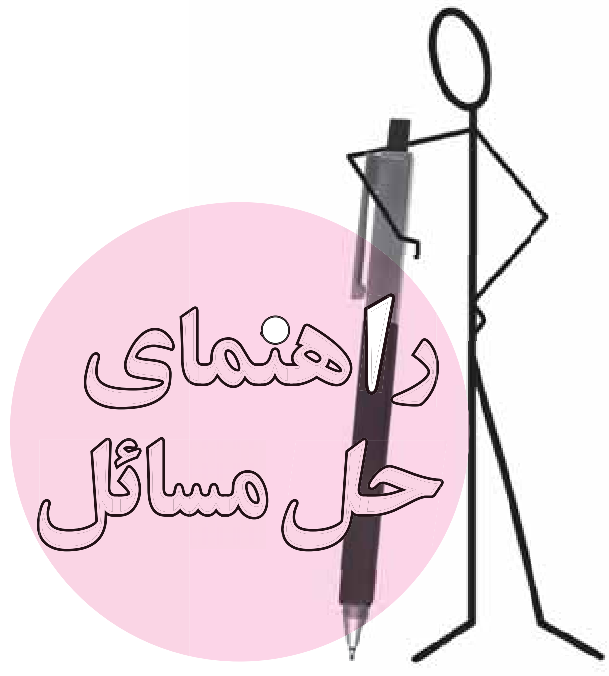


هندسهٔ ۲ (سوم ریاضی)

۱. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{B}=۹۰^\circ)$، ضلع AB ثابت و وتر AC متغیر است. مکان هندسی وسط AC را به‌دست آورید (همراه با دلیل).

۲. خط d و نقاط A و B در دو طرف آن مفروض‌اند. نقطه‌ای بیابید که از A و B به یک فاصله و از d به فاصلهٔ ثابت k باشد (بحث کنید).

۳. مثلث ABC را با داشتن طول‌های AB و AC و نیم‌ساز AD رسم کنید.

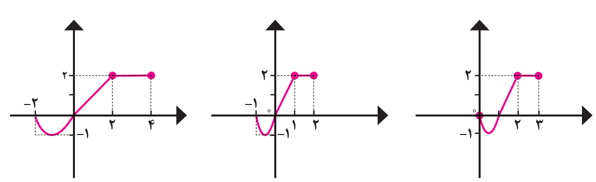


پاسخ‌نامهٔ حسابان

۱.

$$\sin^6 x+\cos^6 x=(\sin^2 x+\cos^2 x)^3$$
$$-3\sin^2 x\cos^2 x(\sin^2 x+\cos^2 x)$$
$$=1-3\sin^2 x\cos^2 x$$
$$=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x$$
$$0\le \sin^2 2x\le 1$$
$$\Rightarrow \frac{1}{4}\le f(x)\le 1$$
$$\Rightarrow R_f=[\frac{1}{4},1]$$

۲. برای رسم نمودار این تابع، با توجه به اینکه $y=f(2(x-1))$، کافی است ابتدا نمودار تابع $y=f(2x)$ را رسم کنیم و سپس آن‌را ۱ واحد به سمت راست انتقال دهیم:



$y=f(x)$ $\quad$ $y=f(2x)$ $\quad$ $y=f(2x-2)$

دقت کنید که می‌توانستیم ابتدا نمودار تابع $g(x)=f(x-2)$ و سپس نمودار تابع $y=g(2x)$ را رسم کنیم.

۳. با توجه به اینکه $fofof=fo(fof)$، کافی است ابتدا fof را پیدا کنیم:

$$fof(x)=f(f(x))=f(\frac{1-x}{1+x})=\frac{1-\frac{1-x}{1+x}}{1+\frac{1-x}{1+x}}$$
$$=\frac{\frac{1+x-1+x}{1+x}}{\frac{1+x+1-x}{1+x}}=\frac{2x}{2}=x$$

و همچنین داریم:

$$D_{fof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_f\}$$
$$=\left\{x\in R-\{-1\} \,\middle|\, \frac{1-x}{1+x}\ne -1\right\}$$

و چون معادلهٔ $\frac{1-x}{1+x}=-1$ جوابی ندارد، پس: $D_{fof}=R-\{-1\}=D_f$. بنابراین: $fofof(x)=f(f(f(x)))=f(x)$ که در آن: $D_{fofof}=D_f=R-\{-1\}$.

۴. $D_f=R$، پس دامنهٔ f متقارن است. از طرف دیگر:

الف) اگر: $x\ge 0$، پس: $f(x)=x^2+x$ و چون: $-x\le 0$، داریم: $f(-x)=(-x)^2-(-x)=x^2+x$ پس: $f(-x)=f(x)$.

ب) اگر: $x\le 0$، پس: $f(x)=x^2-x$ و چون: $-x\ge 0$، داریم: $f(-x)=(-x)^2+(-x)=x^2-x$ بنابراین در این حالت نیز: $f(-x)=f(x)$.

پس تابع f زوج است.

۵.

$$y=\sqrt{x+10}-\sqrt{x+1}=(\sqrt{x+10}-\sqrt{x+1})$$
$$\times\frac{\sqrt{x+10}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+10}+\sqrt{x+1}}=\frac{9}{\sqrt{x+10}+\sqrt{x+1}}$$

اگر $x_1<x_2$ باشد، پس:

$$\sqrt{x_1+10}+\sqrt{x_1+1}<\sqrt{x_2+10}+\sqrt{x_2+1}$$
$$\Rightarrow \frac{9}{\sqrt{x_1+10}+\sqrt{x_1+1}}>\frac{9}{\sqrt{x_2+10}+\sqrt{x_2+1}}$$
$$\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$$

بنابراین تابع f اکیداً نزولی است و چون: $D_f=[-1,6]$، پس برای $x\in D_f$ داریم:

$$-1\le x\le 6\Rightarrow f(-1)\ge f(x)\ge f(6)\Rightarrow 3\ge f(x)\ge 4-\sqrt{7}$$

پس f(x) فقط می‌تواند شامل دو عدد صحیح ۲ یا ۳ باشد.

۶. اگر ضریب $x^۴$، مخالف صفر باشد، $f(x)$ هیچ‌گاه وارون‌پذیر نخواهد بود، پس: $a+۱=۰$ و در نتیجه: $a=-۱$. با جای‌گذاری این مقدار در $f(x)$ داریم: $f(x)=x^۳+۳x^۲+۳x$.

از سوی دیگر، نمودار f و $f^{-۱}$ نسبت به نیم‌ساز ربع اول و سوم قرینهٔ یکدیگرند. پس هر جایی که نمودار وارون f، خط $y=x$ را قطع کند، تابع وارون نیز همان‌جا این خط را قطع می‌کند. بنابراین کافی است محل برخورد $f(x)$ با این خط را پیدا کنیم:

$$\begin{cases} y=x^۳+۳x^۲+۳x \\ y=x \end{cases} \Rightarrow x^۳+۳x^۲+۳x=x$$

$$\Rightarrow x^۳+۳x^۲+۲x=۰ \Rightarrow x(x^۲+۳x+۲)=۰$$

$$\Rightarrow x(x+۱)(x+۲)=۰ \Rightarrow x=۰,-۱,-۲$$

پس در سه نقطه تابع وارون، خط $y=x$ را قطع می‌کند.

پاسخ‌نامهٔ جبر و احتمال

۱. در مجموعهٔ A داریم:

$$a_n=\underbrace{۵۵.....۵}_{n\ \text{بار}}=۵(\underbrace{۱۱.....۱}_{n\ \text{بار}})=\frac{۵}{۹}(\underbrace{۹۹.....۹}_{n\ \text{بار}})=\frac{۵}{۹}(۱۰^n-۱)$$

پس: $A=\left\{\frac{۵}{۹}(۱۰^n-۱)\middle| n\in N\right\}$.

در مجموعهٔ B، جملات با شمارهٔ زوج، صفر هستند. پس می‌توانیم آن‌ها را با دستور $۱-(-۱)^n$ درست کنیم. جملات با شمارهٔ فرد به‌صورت $\frac{۱}{۲^n}$ هستند، پس با تلفیق این دو دستور داریم:

$a_n=\frac{۱-(-۱)^n}{۲}\times\frac{۱}{۲^n}$ پس: $B=\left\{\frac{۱-(-۱)^n}{۲^{n+۱}}\middle| n\in N\right\}$.

۲.

$$\binom{n}{۳}>\binom{n}{۵}$$

$$\Rightarrow \frac{n(n-۱)(n-۲)}{۶}>\frac{n(n-۱)(n-۲)(n-۳)(n-۴)}{۱۲۰}$$

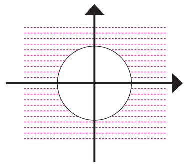
$$\Rightarrow \frac{۱}{۶}>\frac{(n-۳)(n-۴)}{۱۲۰}$$

$$\Rightarrow n^۲-۷n+۱۲<۲۰ \Rightarrow n^۲-۷n-۸<۰$$

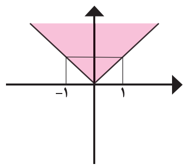
$$\Rightarrow (n+۱)(n-۸)<۰ \Rightarrow -۱<n<۸$$

پس این مجموعه حداکثر هفت عضو دارد. بنابراین تعداد زیرمجموعه‌های سه عضوی این‌گونه مجموعه‌ها، حداکثر برابر با $\binom{۷}{۳}=\frac{۷\times۶\times۵}{۶}=۳۵$ است.

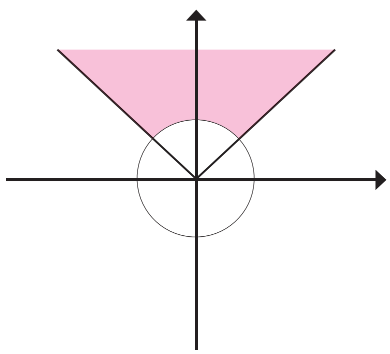
۳. نمودار مربوط به $x^۲+y^۲\geq۱$، به‌صورت روبه‌رو است.



و نمودار مربوط به $|x|<y$ به شکل مقابل است.



بنابراین با اشتراک این دو ناحیه، نمودار رابطهٔ R به‌صورت زیر خواهد بود.



۴. رابطهٔ R روی مجموعهٔ $R-\{۱\}$ به‌صورت $aRb \Leftrightarrow a+b-ab\leq۱$ است. پس:

بازتابی: $aRa \Rightarrow a+a-a^۲\leq۱ \Rightarrow a^۲-۲a+۱\geq۰$

$\Rightarrow (a-۱)^۲\geq۰$

تقارنی: $aRb \Rightarrow a+b-ab\leq۱ \Rightarrow b+a-ba\leq۱ \Rightarrow bRa$

$$\text{تعدی}: \begin{cases} aRb \Rightarrow a+b-ab\leq۱ \Rightarrow ab-a-b+۱\geq۰ \\ \Rightarrow a(b-۱)-(b-۱)\geq۰ \Rightarrow (b-۱)(a-۱)\geq۰ \\ bRc \Rightarrow b+c-bc\leq۱ \Rightarrow bc-b-c+۱\geq۰ \\ \Rightarrow b(c-۱)-(c-۱)\geq۰ \Rightarrow (c-۱)(b-۱)\geq۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow (a-۱)(c-۱)(b-۱)^۲\geq۰ \Rightarrow (a-۱)(c-۱)\geq۰$$

$$\Rightarrow ac-a-c+۱\geq۰ \Rightarrow a+c-ac\leq۱$$

پس: aRc. بنابراین R یک رابطهٔ هم‌ارزی است.

۵. اگر سه مجموعه‌ای که توسط رابطهٔ R افراز شده، $A_۱$، $A_۲$ و $A_۳$ باشند، پس: $|A_۱|+|A_۲|+|A_۳|=۶$. همچنین داریم: $|R|=|A_۱|^۲+|A_۲|^۲+|A_۳|^۲$ بنابراین بیشترین مقدار اندازهٔ R هنگامی به‌دست می‌آید که: $|A_۳|=۴$ و $|A_۱|=|A_۲|=۱$ و در این‌صورت: $|R|=۱+۱+۱۶=۱۸$. کمترین اندازهٔ R نیز هنگامی به‌دست می‌آید که: $|A_۱|=|A_۲|=|A_۳|=۲$ و در نتیجه: $|R|=۴+۴+۴=۱۲$. پس: $۱۲\leq|R|\leq۱۸$.

۶.

$$(A\cap B)\Delta(A\cap C)$$
$$=[(A\cap B)-(A\cap C)]\cup[(A\cap C)-(A\cap B)]$$
$$=[(A\cap B)\cap(A'\cup C')]\cup[(A\cap C)\cap(A'\cup B')]$$
$$=[\underbrace{(A\cap B)\cap A'}_{\varnothing}]\cup[(A\cap B)\cap C']\cup[\underbrace{(A\cap C)\cap A'}_{\varnothing}]$$
$$\cup[(A\cap C)\cap B']=[A\cap(B-C)]\cup[A\cap(C-B)]$$
$$=A\cap[(B-C)\cup(C-B)]=A\cap(B\Delta C)$$

پاسخ‌نامهٔ ریاضی ۳

۱.

$$2x-3-\frac{1}{x^2-4x}>x-4-\frac{1}{x^2-4x}$$
$$\Rightarrow 2x-3>x-4\Rightarrow x>-1$$

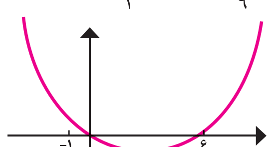
ولی ریشه‌های مخرج $x=0,4$ هستند، پس جواب این نامعادله $(-1,+\infty)-\{0,4\}$ است.

۲.

$$\begin{cases}\cos(x+\frac{\pi}{3})=\cos x\cos\frac{\pi}{3}-\sin x\sin\frac{\pi}{3}\\ \cos(x-\frac{\pi}{3})=\cos x\cos\frac{\pi}{3}+\sin x\sin\frac{\pi}{3}\end{cases}$$
$$\Rightarrow \cos(x+\frac{\pi}{3})+\cos(x-\frac{\pi}{3})=2\cos x\cos\frac{\pi}{3}$$
$$=2\cos x\times\frac{1}{2}=\cos x$$

پس $\cos x=\frac{2}{3}$. اکنون به کمک رابطهٔ $\cos 2x=2\cos^2 x-1$، داریم:

$$\cos 2x=2(\frac{2}{3})^2-1=2(\frac{4}{9})-1=\frac{8}{9}-1=-\frac{1}{9}$$



۳. نمودار $f(x+1)$ حاصل انتقال $f(x)$ به اندازهٔ یک واحد به سمت چپ است. پس نمودار $f(x)$ به‌صورت روبه‌رو خواهد بود.

اکنون دامنهٔ تابع $\sqrt{xf(x)}$ شامل تمام مقادیر x‌ای است که x و $f(x)$ هم‌علامت باشند. پس با توجه به نمودار $f(x)$، فقط $x\geq 6$ قابل قبول است که به ازای این مقادیر داریم: $f(x)\geq 0$. پس: $D=[6,+\infty)$.

۴.

$$f(x)=\frac{x+1}{x-1}\Rightarrow f(g(x))=\frac{g(x)+1}{g(x)-1}$$
$$\Rightarrow \frac{g(x)+1}{g(x)-1}=\frac{x^2+2}{x^2+1}$$

اکنون اگر قرینهٔ صورت را به مخرج اضافه کنیم، داریم:

$$\frac{g(x)+1}{-2}=\frac{x^2+2}{-1}\Rightarrow g(x)=2x^2+3$$
$$\Rightarrow g(1)=2+3=5$$

۵.

$$\begin{cases}D_g: x^2+2x>0\Rightarrow x(x+2)>0\\ \Rightarrow x<-2 \text{ یا } x>0\Rightarrow Dg=(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)\\ D_f: 3-x\geq 0\Rightarrow x\leq 3\Rightarrow D_f=(-\infty,3]\end{cases}$$

بنابراین داریم:

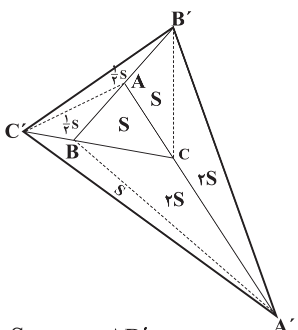
$$D_{fog}=\{x\in D_g\,|\,g(x)\in D_f\}$$
$$=\{x\in\underbrace{(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)}_{A}\,|\,\log_2(x^2+2x)\leq 3\}$$
$$\log_2(x^2+2x)\leq 3\Rightarrow x^2+2x\leq 2^3$$
$$\Rightarrow x^2+2x-8\leq 0\Rightarrow (x+4)(x-2)\leq 0$$
$$\Rightarrow -4\leq x\leq 2\Rightarrow x\in\underbrace{[-4,2]}_{B}$$

پس:

$$D_{fog}=A\cap B=[-4,-2)\cup(0,2]$$

پاسخ مسائل هندسهٔ دهم

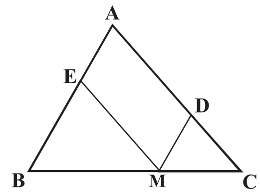
۱. اگر مساحت مثلث ABC مساوی S باشد، طبق آنچه از کتاب درسی می‌دانیم، می‌توان نوشت:



$$\frac{S_{AB'C}}{S_{ABC}}=\frac{AB'}{AB}=1\Rightarrow S_{AB'C}=S$$
$$\frac{S_{AB'C}}{S_{A'CB'}}=\frac{AC}{A'C}=\frac{1}{2}\Rightarrow S_{A'CB'}=2S$$
$$\frac{S_{A'BC}}{S_{ABC}}=\frac{A'C}{AC}=2\Rightarrow S_{A'BC}=2S,$$
$$\frac{S_{A'BC}}{S_{A'BC'}}=\frac{BC}{BC'}=2\Rightarrow S_{A'BC'}=S$$
$$\frac{S_{ABC'}}{S_{ABC}}=\frac{BC'}{BC}=\frac{1}{2}\Rightarrow S_{ABC'}=\frac{1}{2}S$$
$$\frac{S_{AB'C'}}{S_{ABC'}}=\frac{AB'}{AB}=1\Rightarrow S_{AB'C'}=\frac{1}{2}S$$
$$\Rightarrow S_{A'B'C'}=8S$$

۲.

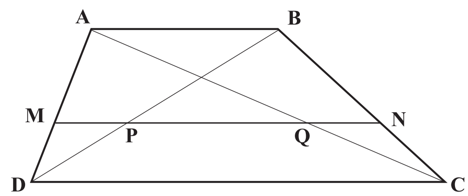
$$\Delta ABC: MD\parallel AB\Rightarrow\frac{AD}{AC}=\frac{BM}{BC}$$
$$ME\parallel AC\Rightarrow\frac{AE}{AB}=\frac{MC}{BC}$$
$$\Rightarrow\frac{AD}{AC}+\frac{AE}{AB}=\frac{BM+MC}{BC}=\frac{BC}{BC}=1$$



۳.

$$\Delta ADB : MP \parallel AB \Rightarrow \frac{MP}{AB} = \frac{DM}{AD} \quad (1)$$

$$\Delta ACB : QN \parallel AB \Rightarrow \frac{QN}{AB} = \frac{CN}{CB} \quad (2)$$

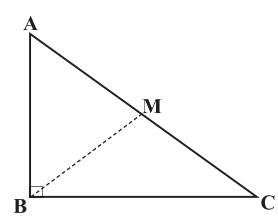


و طبق قضیهٔ تالس در ذوزنقه داریم: $\frac{DM}{AD} = \frac{CN}{CB}$.

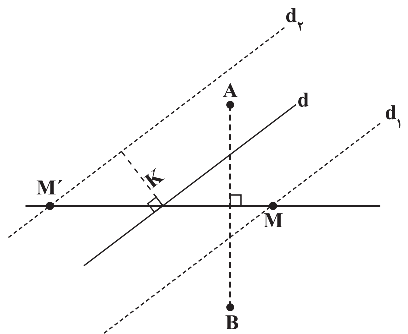
بنابرایـــن بـــا توجه بـــه برابری‌هـــای ۱ و ۲ خواهیم داشـــت: $\frac{QN}{AB} = \frac{MP}{AB}$ و در نتیجه: MP=QN.

پاسخ مسائل هندسهٔ ۲

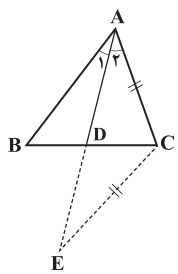
۱. می‌دانیـــم که در هر مثلـــث قائم‌الزاویه، میانهٔ وارد بر وتر، نصف وتر است. بنابراین: $MB = \frac{AC}{2} = AM = MC$. پس M از A و B به یک فاصله است (با تغییر مکان C و تغییر CA و CB و ثابت بودن جای A و B). بنابراین M همواره روی عمودمنصف AB قرار دارد. یعنی مکان هندسی M عمودمنصف پاره‌خط AB است.



۲. عمودمنصف AB مکان هندســـی نقاطی است که از A و B به یک فاصله‌اند (خط L) و مکان هندسی نقاطی که از d به فاصلهٔ ثابت k قـــرار دارند، خط‌های d_1 و d_2 موازی d و به فاصلهٔ k از آن هســـتند. بنابراین جواب مسئله نقطهٔ برخورد L با d_1 و d_2 است. اگر L با d_1 و d_2 متقاطع باشد، مسئله دو جواب دارد و اگر: $L \parallel d_1 \parallel d_2$، مسئله جواب ندارد و اگر L بر d_1 یا d_2 منطبق باشد، مسئله بی‌شمار جواب دارد.



۳. مســـئله را حل شـــده فـــرض می‌کنیم. نیم‌ســـاز AD را امتداد می‌دهیم تا خطی را که از C موازی AB رسم شده است، در E قطع کند. در این‌صورت داریم:



$$CE \parallel AB \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{E}, \hat{A}_1 = \hat{A}_2$$
$$\Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{E} \Rightarrow AC = CE$$

همچنین، با توجه به تشابه مثلث‌های ADB و DEC داریم:

$$\frac{AD}{DE} = \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow DE = (\frac{AC}{AB})AD$$

اکنـــون بـــا معلوم بـــودن AC و AB، $\frac{AC}{AB} = k$ معلوم اســـت و پاره‌خط DE=kAD نیز معلوم اسـت. در نتیجه AE=(k+۱)AD نیز قابل رســـم اســـت و از آنجا می‌توان مثلـــث ACE و در نتیجه مثلث ABC را رسم کرد.

طریقهٔ رســـم: ابتدا پاره‌خـــط معلوم $AE = (\frac{AC}{AB} + 1)AD$ را رســـم می‌کنیم. سپس به مرکز A و شعاع AC و به مرکز E و همین شـــعاع کمان‌هایی می‌زنیم تا دو کمان یکدیگر را در C قطع کنند و مثلث ACE را بنا می‌کنیم. در ادامه، هم اندازهٔ زاویهٔ CAE در طرف دیگـــر AE جدا می‌کنیم و روی ضلع آن به اندازهٔ AB پیش می‌رویم تا نقطهٔ B هم به‌دســـت آید. حالا B را به C وصل می‌کنیم تا مثلث ABC رسم شود. (یا اینکه به اندازهٔ AD روی AE جدا می‌کنیم تا D مشـــخص شود و CD را امتداد می‌دهیم تا کمانی را که به مرکز A و به شعاع AB زده‌ایم در نقطهٔ B قطع کند.)

بحث: مســـئله در صورتی جواب دارد که مثلث ACE قابل رسم باشد؛ یعنی داشته باشیم:

$$|AC - CE| < AE < AC + CE$$
$$0 < (\frac{AC}{AB} + 1)AD < 2AC$$
$$\Rightarrow AD < \frac{2AB.AC}{AB + AC}$$